

Laboratorium Automatyki i Regulacji Automatycznej

TTS09: Charakterystyki częstotliwościowe rysowanie, interpretacja, składanie, modyfikacja właściwości układów.

1. Charakterystyki częstotliwościowe

Charakterystyka częstotliwościowa jest reprezentacją odpowiedzi obiektu na sinusoidalne wymuszenie przy zmieniającej się częstotliwości tego wymuszenia. Wówczas sygnał wyjściowy obiektu liniowego także jest sinusoidą o tej samej częstotliwości, ale różnej amplitudzie i różnym przesunięciu fazowym. Ch-ka częstotliwościowa jest definiowana jako zależność stosunku amplitud i różnicy faz wejściowego i wyjściowego sygnału sinusoidalnego.

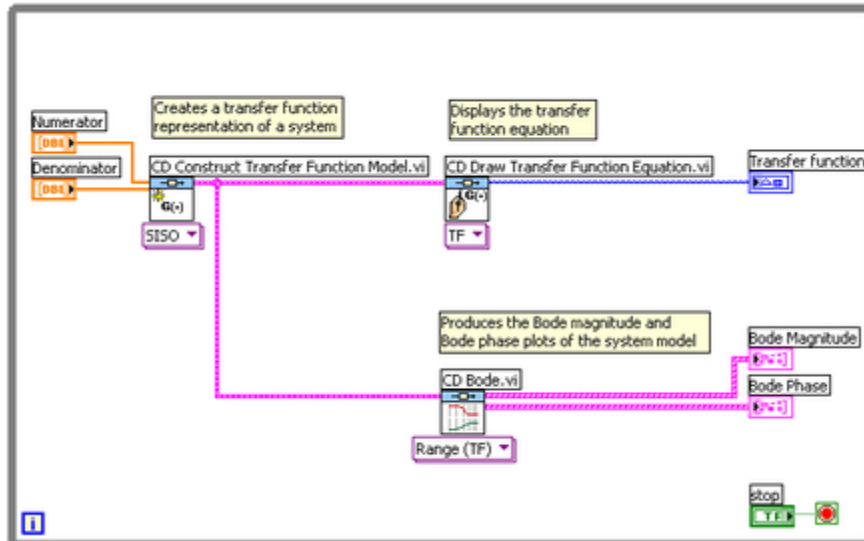
Aby wykreślić ch-ki częstotliwościowe należy stworzyć wektor częstotliwości z wartościami od "0" do "+∞", następnie obliczyć wartości transmitancji dla tych częstotliwości podstawiając $s=j\omega$. Wówczas, jeśli $G(s)$ jest transmitancją układu otwartego i ω jest wektorem częstotliwości, wykreśla się ch-kę $G(j\omega)$ w funkcji ω . Ponieważ $G(j\omega)$ jest liczbą zespoloną, można wykreślić 2 oddzielne ch-ki: amplitudy oraz fazy (są to ch-ki Bode'go) lub jedną na płaszczyźnie zespolonej (jest to ch-ka Nyquista).

2. Ch-ki Bode'go

Jak zauważono powyżej, ch-ki Bode'go są reprezentacją amplitudy oraz fazy dla funkcji $G(j\omega)$, gdzie wektor częstotliwości zawiera tylko dodatnie częstotliwości.

Sposób graficzny LabVIEW

Aby wykreślić ch-ki Bode'go można użyć bloku CD Bode VI (sekcja Frequency Response na palecie Control Design) (rys. 1.)



Rys. 1. Kreślenie ch-k Bode'go

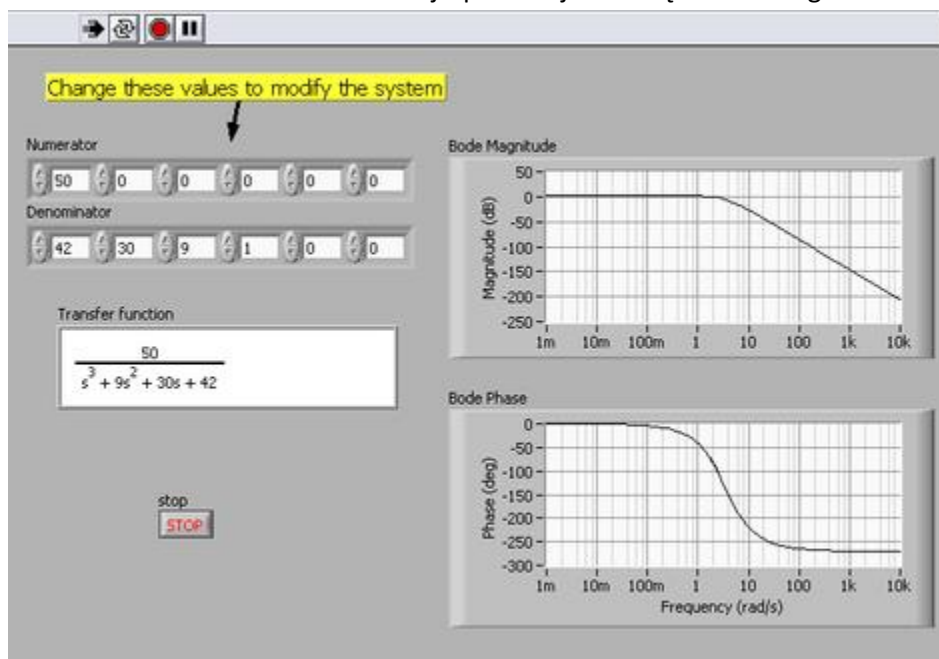
Sposób z wykorzystaniem MathScript

Można także użyć następującego m-pliku w oknie MathScript (Tools » MathScript Window):

```
num = 50;
den = [1 9 30 40];
sys = tf(num, den);
bode(sys)
```

Wyniki

Niezależnie od wykorzystanego sposobu, wyświetlona została transmitancja i ch-ki Bodego dla zdefiniowanego obiektu. Rys. 2 przedstawia panel przedni VI zbudowanego wg rys. 1. Zmiana parametrów licznika i mianownika transmitancji spowoduje zmianę ch-k Bode'go.



Rys. 2. Ch-ki Bode'go w LabVIEW

Warto zaznaczyć, że oś częstotliwości posiada logarytmiczną skalę, faza podana jest w stopniach, amplituda podana jest jako wzmocnienie w decybelach. Decybel definiowany jest jako $20 \cdot \log_{10}(|G(j\omega)|)$

3. Ch-ki Nyquista

Ch-ki Nyquista są reprezentacją amplitudy i fazy dla funkcji $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{-j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

Gdzie amplituda to moduł funkcji zespolonej:

$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

A faza to argument funkcji zespolonej:

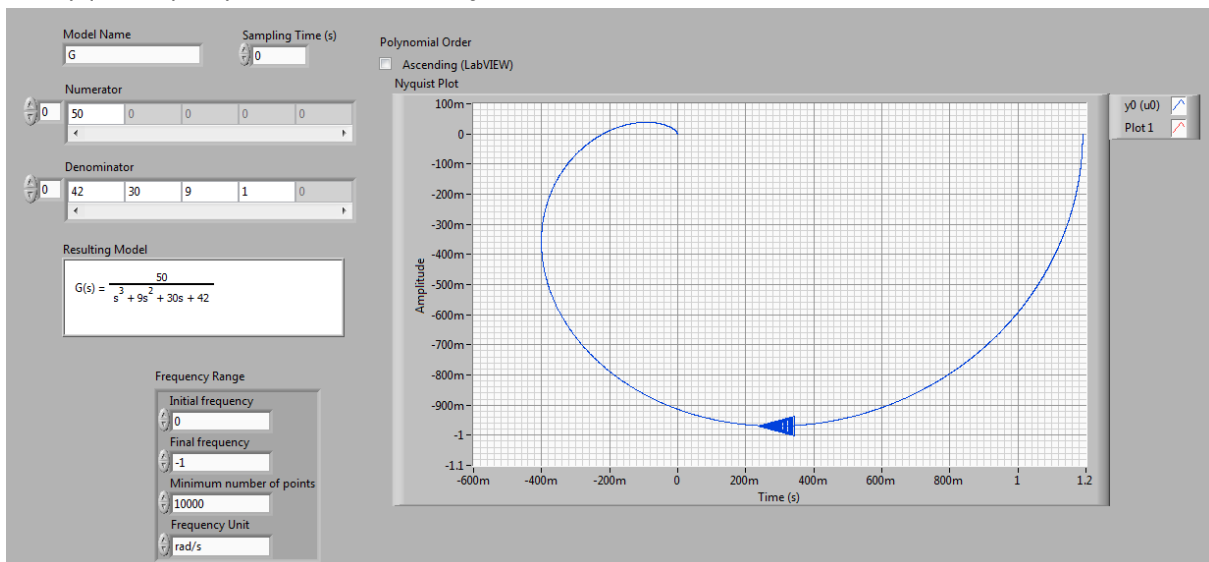
$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

Wektor częstotliwości zawiera tylko dodatnie częstotliwości.

Sposób graficzny LabVIEW

Aby wykreślić ch-ki Nyquista można użyć bloku CD Nyquist VI (sekcja Frequency Response na palcie Control Design).

UWAGA: domyślnie LabVIEW kreśli ch-ki Nyquista dla dodatnich i ujemnych częstotliwości. W praktyce nie ma sensu rozważać ujemnych częstotliwości, dlatego warto zmienić zakres częstotliwości do kreślenia wykresu poprzez dodanie zadajnika na wejście „Frequency Range” funkcji CD Nyquist i sprecyzowanie zakresu częstotliwości.



Rys. 3. Przykładowa ch-ka Nyquista.

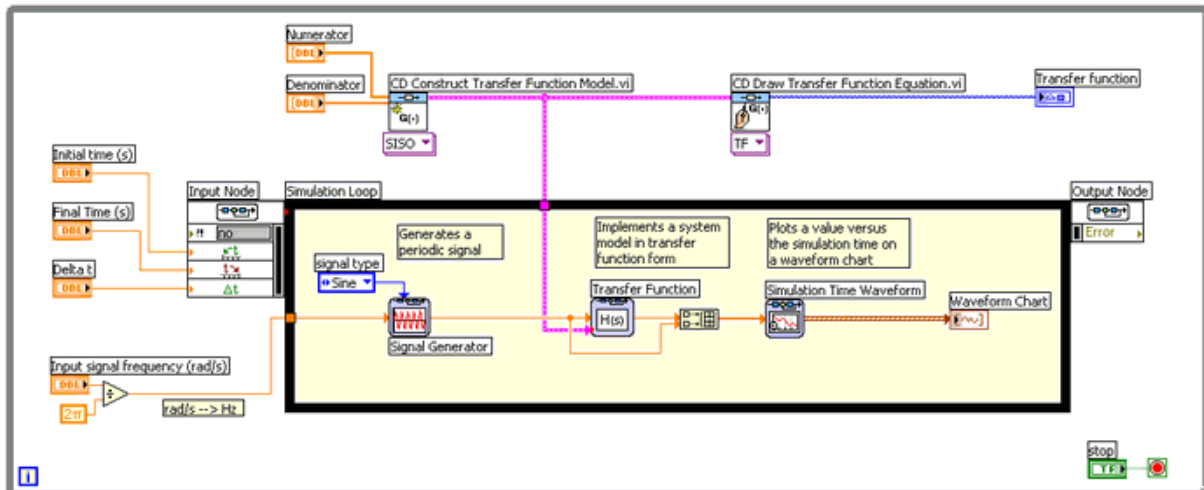
4. Interpretacja ch-k częstotliwościowych

Każdemu punktowi na ch-ce Nyquista odpowiada punkt na ch-ce amplitudowej Bodego oraz fazowej Bodego i odwrotnie. Długość wektora jaki tworzy dana liczba zespolona to moduł transmitancji widmowej i jednocześnie wzmocnienie dla danej częstotliwości. Kąt jaki odkłada ten wektor na płaszczyźnie zespolonej to przesunięcie fazowe dla danej częstotliwości. Możliwe jest dokładne odczytanie interesujących wartości z charakterystyk dzięki kursorom kontrolki rysujących

ch-ki. Aby prześledzić jak zmienia się odpowiedź układu dla zmieniającej się częstotliwości należy wykonać symulację.

Sposób graficzny LabVIEW

Można użyć pętli symulacji (Simulation Loop z palety Simulation), aby zasymulować odpowiedź układu na wymuszenie harmoniczne. Należy odnieść się do schematu blokowego z rys. 4, aby zbudować taki układ symulacji.



Rys. 4. Symulacja liniowa w LabVIEW.

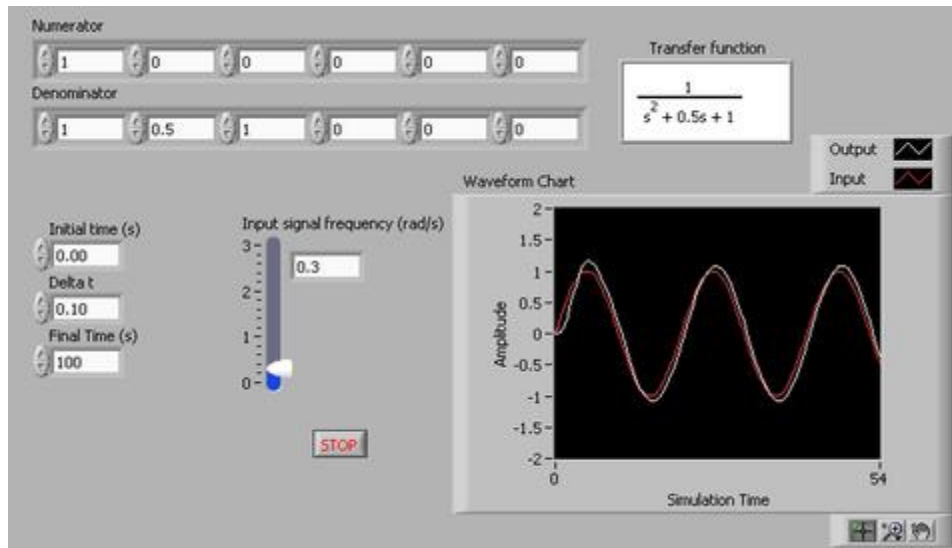
Sposób wykorzystujący MathScript

Innym sposobem na osiągnięcie tych samych rezultatów jest wykorzystanie komendy *lsim* w oknie MathScript:

```
w = 0.3;  
num = 1;  
den = [1 0.5 1];  
sys = tf(num,den);  
t = 0:0.1:100;  
u = sin(w*t);  
[y,t] = lsim(sys,u,t);  
plot(t,y,t,u)
```

Wyniki

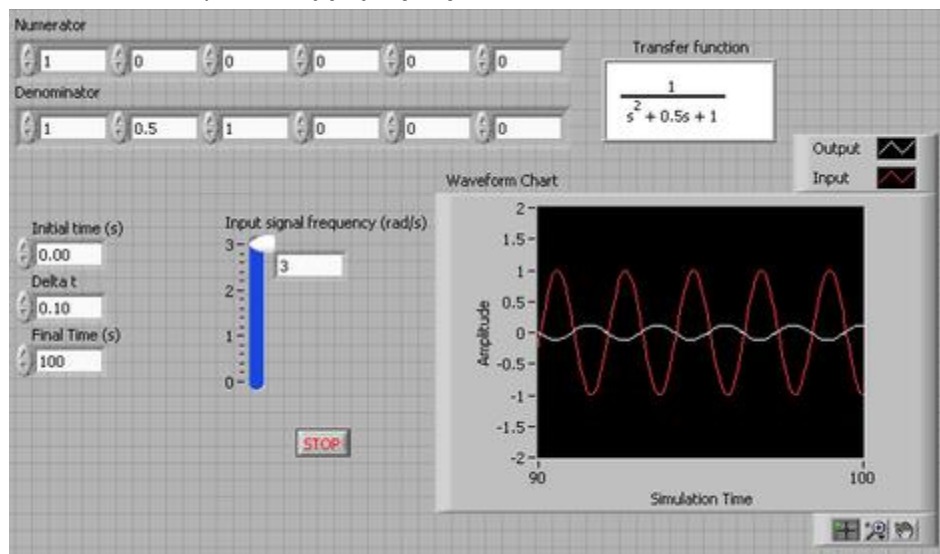
Należy pamiętać, że interesująca jest wyłącznie odpowiedź w stanie ustalonym, dlatego należy zignorować stan nieustalony na wykreślonych przebiegach czasowych.



Rys. 5. Liniowa symulacja układu

Należy zauważyć, że dla częstotliwości niższych od częstotliwości granicznej sygnał wyjściowy (biały) śledzi sygnał wejściowy (czerwony) całkiem dobrze i jest prawdopodobnie kilka stopni za sygnałem wejściowym¹.

Jeśli ustawiona zostanie częstotliwość sygnału wejściowego większa od częstotliwości granicznej, uzyskana zostanie bardzo zniekształcona odpowiedź (względem sygnału wejściowego). Warto zaobserwować efekty zmieniającej się częstotliwości od 0.3 do 3 rad/s.

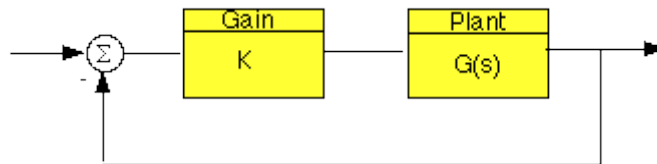


Rys. 6. Liniowa symulacja układu, $\omega = 3$

Amplituda sygnału wyjściowego wynosi ok. 10% amplitudy sygnału wejściowego, jak wynikało z ch-ki częstotliwościowej, oraz jest niemalże w przeciwfazie do sygnału wejściowego. Warto poeksperymentować z różnymi wartościami ω i sprawdzić zgodność rezultatów z ch-kami Bode'go.

5. Zapas amplitudy i fazy

Załóżmy, że mamy układ regulacji następującej postaci:



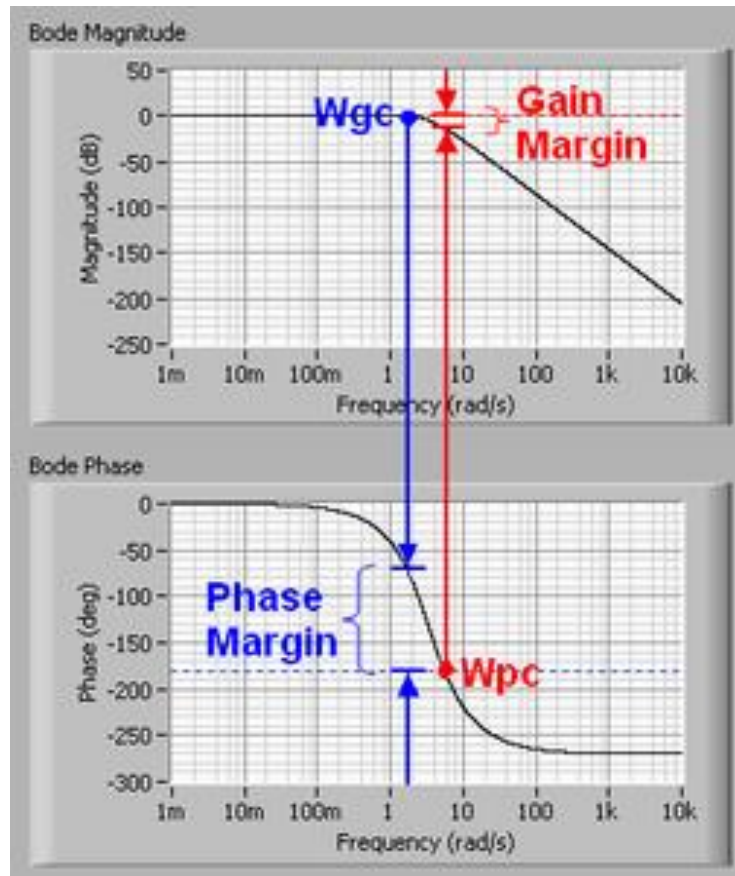
Rys. 7. Zamknięty układ regulacji

W takim układzie, K jest wzmocnieniem, a $G(s)$ jest transmitancją obiektu sterowania. Zapas wzmocnienia jest definiowany jako **zmiana wzmocnienia układu otwartego wymagana do uczynienia układu niestabilnym (po zamknięciu)**.

Układy automatycznej regulacji z większym zapasem wzmocnienia są w stanie znieść większe zmiany fizycznych parametrów obiektów (np. na skutek zużycia/zestarzenia się elementów obiektu) zanim zamknięty układ stanie się niestabilny. Warto pamiętać, że wzmocnienie amplitudy równe „1” równoważne jest wzmocnieniu „0” w dB.

Zapas fazy jest definiowany jako **zmiana przesunięcia fazowego układu otwartego wymagana do uczynienia układu zamkniętego niestabilnym**. Zapas fazy wskazuje także tolerancję układu na opóźnienie. Jeśli w układzie wystąpi opóźnienie większe niż $180/\omega_{pc}$ (gdzie ω_{pc} jest częstotliwością, dla której przesunięcie fazowe wynosi 180 stopni) to układ po zamknięciu będzie niestabilny. Opóźnienie może być traktowane jako dodatkowy blok w głównym torze schematu blokowego, który dodaje przesunięcie fazowe, ale nie ma wpływu na amplitudę tzn. opóźnienie może być zaprezentowane jako blok ze wzmocnieniem 1 i fazą $\omega * T_d$ (gdzie T_d to czas opóźnienia)

Zapas fazy jest różnicą fazy pomiędzy wartością ch-ki fazy w punkcie odpowiadającym częstotliwości, która daje wzmocnienie równe 0dB (na rys. 8 zaznaczona jako W_{gc}), a wartością -180 stopni. Podobnie, zapas wzmocnienia jest różnicą pomiędzy wartością ch-ki amplitudy w punkcie odpowiadającym częstotliwości, która daje fazę równą -180 stopni (na rys. 8. zaznaczona jako W_{pc}) i wartością 0 dB.



Rys. 8. Zapas amplitudy i fazy.

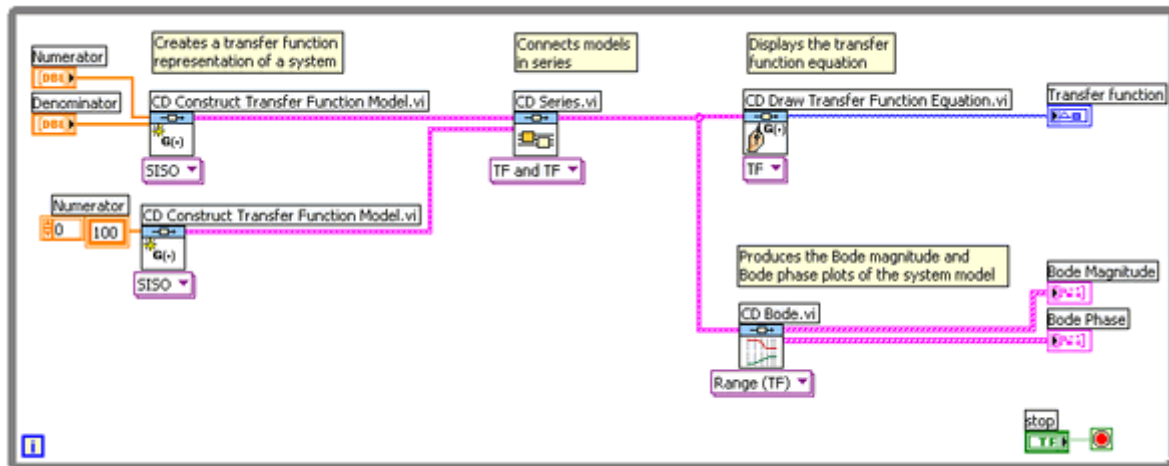
6. Korekcja wzmocnienia

Jedną z zalet ch-k częstotliwościowych jest to, że nie trzeba wykreślać na nowo ch-k Bode'go, aby znaleźć nowy zapas fazy, jeśli zmieniało się tylko wzmocnienie. Zmiana wzmocnienia w układzie pociąga za sobą zmianę tylko ch-ki amplitudy. Znalezienie zapasu fazy jest tylko kwestią znalezienia nowej częstotliwości granicznej i odczytanie zapasu fazy.

Aby zaobserwować ten efekt warto spojrzeć na ch-ki Bode'go z rys. 8. Można zauważyć, że zapas fazy wynosi tam ok. 100 stopni. Załóżmy, że dodano wzmocnienie równe 100.

Sposób graficzny LabVIEW

Aby uzyskać taką zmianę w VI należy dodać kolejny CD Construct Transfer Function Model VI do schematu blokowego z rys. 1. Następnie należy utworzyć stałą tablicę i podłączyć do wejścia Numerator. W pierwszej komórce tablicy należy wpisać 100. Następnie należy dodać CD Series VI do schematu blokowego (sekcja Model Interconnection na palecie Control Design) i połączyć oba modele transmitancyjne do wejść bloku CD Series VI. W dalszej kolejności należy podłączyć model wyjściowy bloku CD Series VI do CD Bode oraz CD Draw Transfer Function VI jak poprzednio.



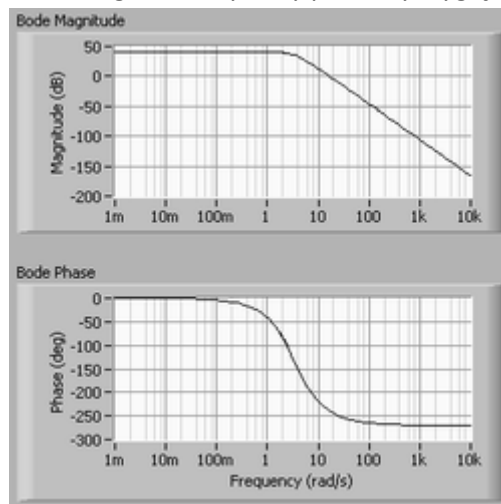
Rys. 9. Ch-ki Bode'go z dodanym wzmacnieniem.

Sposób wykorzystujący MathScript

Jeśli użyty został m-plik do zamodelowania obiektu, należy wpisać komendę `bode(100*sys)` do okna MathScript.

Wyniki

Po dodaniu wzmacnienia równego 100, wykresy powinny wyglądać jak poniżej:

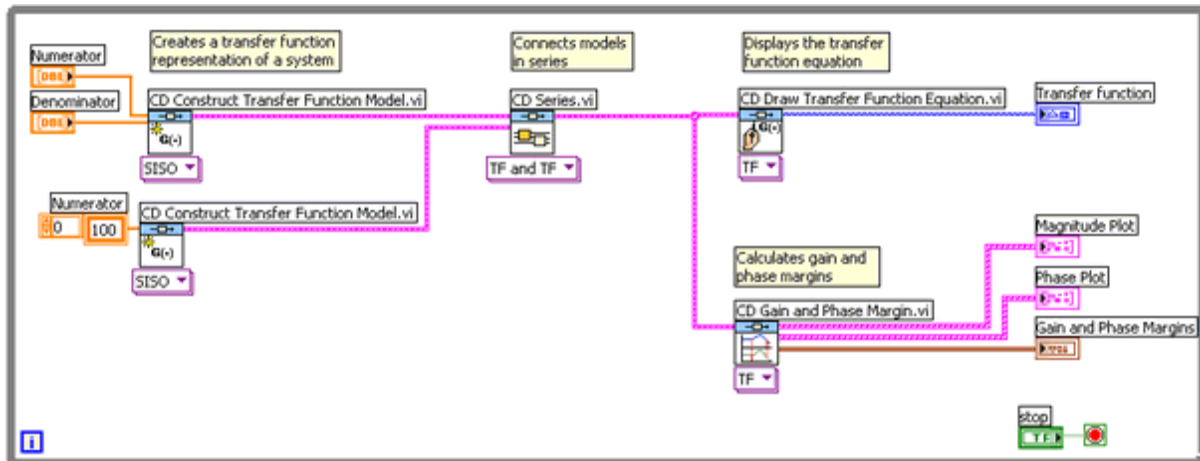


Rys. 10. Ch-ki Bode'go z dodanym wzmacnieniem

Jak można zauważyć, wykres fazy jest identyczny jak poprzednio, wykres amplitudy jest przesunięty w górę o 40dB (wzmacnienie 100). Zapas fazy wynosi teraz ok. -60 stopni. Można wyznaczyć zapas wzmacnienia i fazy dla obiektu bezpośrednio w LabVIEW

Sposób graficzny LabVIEW

Używając VI z rys. 1. Należy zastąpić CD Bode VI blokiem CD Gain and Phase Margin VI, (sekcja Frequency Response na palcie Control Design). Następnie należy utworzyć wskaźniki dla wykresu amplitudy, fazy oraz zapasów amplitudy i fazy.



Rys. 11. Zapas amplitudy i fazy w LabVIEW

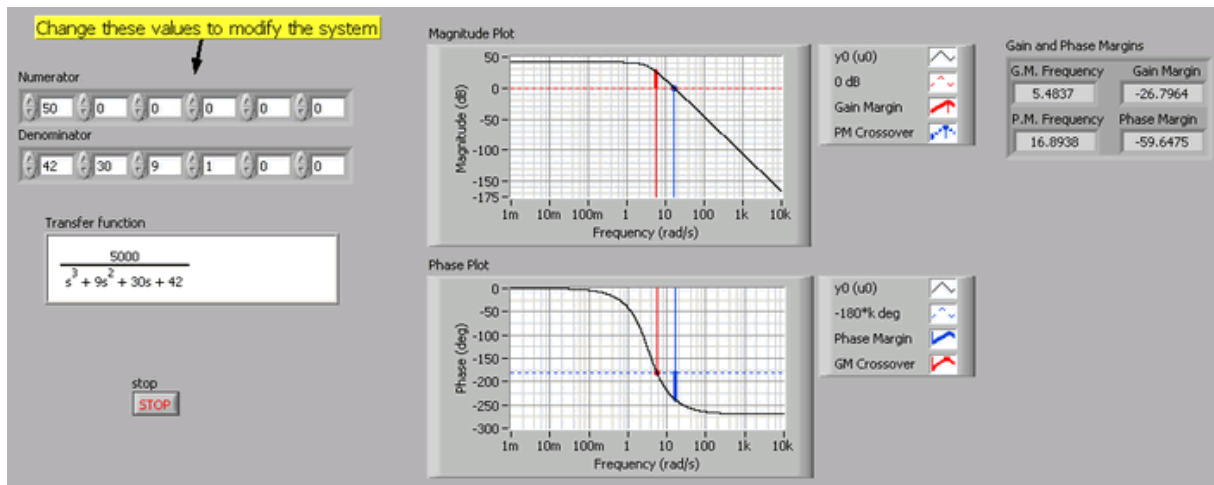
Sposób wykorzystujący MathScript

Można wykorzystać także komendę *margin* w oknie MathScript. Komenda ta zwraca wartość zapasu wzmacnienia i fazy, częstotliwości, dla których wyznacza się zapas amplitudy i fazy oraz ich graficzną reprezentację na ch-kach Bode'go. Jeśli użyty został m-plik do zamodelowania układu, należy wpisać następującą komendę w oknie MathScript:

```
margin(sys)
```

Wyniki

Wyświetlenie zapasu wzmacnienia i fazy zwróci wyniki zgodne z rys. 12.



Rys. 12. Zapas amplitudy i fazy

7. Korekcja fazy

Dobrym przykładem na korekcję fazy (przyspieszenia lub opóźnienia działania układu) jest szeregowe dołączenie korektora. Ogólna postać transmitancji członu korekcyjnego I rzędu:

$$G(s) = \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s}$$

gdzie T_1 , T_2 to stałe czasowe

Zależnie od tego, która stała czasowa jest większa, człon korekcyjny przyspiesza ($T_2 > T_1$) lub opóźnia ($T_2 < T_1$) fazę sygnału wejściowego.

Realizacja korekty fazy przebiega analogicznie jak w przypadku korekty wzmocnienia (połączenie szeregowo korektora i obiektu).

Zadania do wykonania

1. Wykreślić ch-ki częstotliwościowe dla obiektu $G(s) = \frac{50}{s^3 + 9s^2 + 30s + 42}$
2. Przeanalizować/sprawdzić jak w dziedzinie czasu zmienia się wzmocnienie i przesunięcie fazowe przy zmieniającej się częstotliwości wymuszenia harmonicznego.
3. Wyznaczyć zapas amplitudy i fazy dla danego obiektu.
4. Zaobserwować jak zmieniają się ch-ki oraz o ile zmieniają się zapasy wzmocnienia i fazy, gdy:
 - a. zmieniane jest wzmocnienie (zmodyfikować diagram z rys. 9 tak, aby modyfikować wtrącane wzmocnienie z poziomu panelu przedniego), np.:
 - i. x0.1
 - ii. x10
 - iii. x100
 - b. dołączany jest korektor fazy np:
 - i. $G_k(s) = \frac{3s+1}{s+1}$
 - ii. $G_k(s) = \frac{2+1}{2s+1}$

Pytania kontrolne:

1. Co to jest ch-ka częstotliwościowa?
2. Jakie rodzaje ch-k częstotliwościowych wykorzystuje się w teorii sterowania?
3. Jak definiowany jest decybel?
4. Jak definiowany jest zapas wzmocnienia?
5. Lepszy jest większy czy mniejszy zapas wzmocnienia i dlaczego?
6. Jak definiowany jest zapas fazy?
7. Lepszy jest większy czy mniejszy zapas fazy i dlaczego?